Algèbre I

المقصف الجامعي
التشغيل الذاتي
INDH

Université Abdelmalek Essaadi , ENSA Al Hoceima,
$1^{ére}$ Année Préparatoire , 2018-2019.

Devoir surveillé N°1 d'Algébre de Base.
Durée : 2h.
17/12/2018

Prof. Younes Abouelhanoune

A noter que la rédaction, le raisonnement et la clarté de l'écriture sont tenus en compte.

Exercice 1 : (5 pt)

1. Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 4$ et $x_{n+1} = \frac{2x_n^2-3}{x_n+1}$

   Montrer par récurrence que : .
$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad x_n > 3$$

2. En utilisant le raisonnement par contraposition, Montrer que :
$$x \neq 2 \text{ et } y \neq 2 \Rightarrow xy - 2x - 2y + 4 \neq 0$$

3. Soit E un ensemble non vide et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Pour $A, B \in \mathcal{P}(E)$, on pose
$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

   a. Déterminer $A\Delta\emptyset$ et $A\Delta A$.

   b. Montrer que $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E) : \ (A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$

   c. Montrer que $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E) : \ A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$

Exercice 2 : (4,5 pt)

1. Soit $(E, *)$ un monoïde avec E ensemble fini.
   Montrer que tout élément régulier de E est inversible.
2. Soit $(A, +, .)$ un anneau commutatif

   a. Soit $x \in A$, on pose $I(x) = xA = \{ax \ / \ a \in A\}$
   Montrer que $I(x)$ est un idéal de $(A, +, .)$.

   b. Montrer que $(A, +, .)$ est un corps si et seulement si les seuls idéaux de $(A, +, .)$ sont $\{0\}$ et A.

Exercice 3 : (5 pt)

Soit l'application f définie comme suit :

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\} \to \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\} \\ x & \to & f(x) = \dfrac{x+1}{2x-1} \end{array}$$

1. f ainsi définie est-elle injective ? surjective ?
2. Donner l'expression de $(f \circ f)(x)$.
3. Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$
4. Soit T la relation définie sur $]1;+\infty[$ par :

$$xTy \Leftrightarrow \frac{y}{1+y^2} \leq \frac{x}{1+x^2}$$

Montrer T que est une relation d'ordre.

Exercice 4 : (5,5 pt)

On définit sur $\mathbb{R}$ deux lois de composition internes $*$ et $\perp$ par :

$$x * y = x + y + 1 \quad \text{et} \quad x \perp y = xy + x + y$$

1. Montrer que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe abélien
2. Montrer que $(\mathbb{R}, *, \perp)$ est un anneau commutatif.
3. Prouver que l'application

$$\begin{array}{rccc} \theta : & (\mathbb{R}, *, \perp) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, +, \times) \\ & x & \longmapsto & x+1 \end{array}$$

est un isomorphisme d'anneaux.

4. Déduire que $(\mathbb{R}, *, \perp)$ est un corps commutatif